MỘT VÀI KẾT QUẢ VỀ MÔĐUN BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU

ĐÀO THỊ TRANG
Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP. HCM

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi tổng quan một số kết quả về các môđun bất biến đẳng cấu, đồng thời nêu một số kết quả liên quan đến lớp các môđun này. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa một số kết quả liên quan đến lớp vành tựa Frobenius và chúng tôi chứng minh được một vành R là vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải, ef-mở rộng phải và thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải.
Từ khóa: Môđun nội xạ, môđun giả nội xạ, môđun bất biến đẳng cấu

1 GIỚI THIỆU VÀ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Trong bài báo này, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị và mọi R-môđun được xét là môđun unita. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu những khái niệm cơ bản được sử dụng trong bài báo. Với vành R đã cho, ta viết M_R (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ M là một R-môđun phải (t.ư, trái). Trong một ngữ cảnh cụ thể của bài báo, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R. Chúng ta dùng các ký hiệu $A \leq M$ để chỉ A là môđun con của M. Đồng cấu từ M đến N; ký hiệu $M \to N$ được hiểu là R-đồng cấu từ M đến N. Ký hiệu $End(M)$ là tập tất cả các đồng cấu từ M đến M (hay còn được gọi là tập tất cả các đồng cấu của M). Cho M là một R-môđun phải và X là tập khác rỗng của M. Linh hóa tử phải của X trong R ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định như sau:

$$r_R(X) = \{r \in R : Xr = 0\}$$

Khi không sợ nhầm lẫn ta có thể viết gọn là $r(X)$ thay vì $r_R(X)$. Khi $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ thì ta viết $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thay vì $r(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Ta có $r_R(X)$ là một iđêan phải của vành R.

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Huế, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 03(51)/2019: tr. 40-49
Ngày nhận bài: 26/02/2019; Hoàn thành phản biện: 03/4/2019; Ngày nhận đăng: 11/3/2019

Phần tiếp theo của mục này, chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm liên quan. Môđun con K của $R-$môđun M được gọi là môđun con cốt yếu trong M, kí hiệu $K \leq^e M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K \cap L = 0$ thì $L = 0$. Lúc này, ta cũng nói M là mở rộng cốt yếu của K. Nếu mọi môđun con của M là cốt yếu thì M được gọi là môđun đều. Đối ngẫu, chúng ta có khái niệm môđun con đối cốt yếu. Một môđun con K của $R-$môđun M được gọi là môđun con đối cốt yếu trong M, kí hiệu $K \ll M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K + L = M$ thì $L = M$.

Liên quan đến tính cốt yếu và đối cốt yếu của các môđun con, chúng ta có khái niệm đơn cấu cốt yếu và toàn cấu đối cốt yếu. Một đơn cấu $f : K \to M$ được gọi là cốt yếu nếu $\mathrm{Im}(f) \leq^e M$. Toàn cấu $g : M \to N$ được gọi là đối cốt yếu nếu $\mathrm{Ker}(g) \ll M$.

Các môđun con phần bù và phần phụ đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu cấu trúc của một số lớp vành. Cho N là môđun con của M, nếu $N' \leq M$ là cực đại với tính chất $N \cap N' = 0$ thì ta nói N' là phần bù của N trong M. Cho A và A' là các môđun con của M_R, khi đó A' được gọi là phần phụ của A trong M nếu A' là môđun con cực tiểu với tính chất $A + A' = M$, điều này tương đương $M = A + A'$ và $A \cap A' \ll A'$. Theo định nghĩa, thì mọi môđun luôn có phần bù. Tuy nhiên, không phải môđun nào cũng có phần phụ. Tiếp theo chúng tôi nêu một số khái niệm liên quan đến tính nội xạ và xạ ảnh của các môđun. Một môđun U được gọi là M-nội xạ nếu với mỗi môđun con K của M thì mọi đồng cấu $v : K \to U$ đều mở rộng được đến đồng cấu $\bar{v} : M \to U$. Nghĩa là sơ đồ sau giao hoán ($\bar{v}f = v$).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[dl, "\bar{v}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Nếu môđun M là M-nội xạ thì M được gọi là tựa nội xạ ([10]). Các tác giả Johnson và Wong đã chứng minh rằng M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M bất biến qua tất cả các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó.

Môđun U được gọi là M-giả nội xạ nếu với mỗi môđun con K của M thì mọi đơn cấu $v : K \to U$ đều mở rộng được đến đồng cấu $\bar{v} : M \to U$. Môđun M được gọi là giả nội xạ nếu M là M-giả nội xạ ([9]).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[dl, "\bar{v}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Rõ ràng mọi môđun tựa nội xạ là giả nội xạ. Tuy nhiên chiều ngược không đúng trong trường hợp tổng quát.

Môđun U được gọi là M-xạ ảnh nếu với mọi toàn cấu $g : M \to N$ và mỗi đồng cấu $v : U \to N$ đều tồn tại một đồng cấu $\bar{v} : U \to M$ sao cho $v = g\bar{v}$.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "\bar{v}"'] \arrow[d, "v"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nếu môđun U là U- xạ ảnh thì U được gọi là tựa xạ ảnh. Nếu U là M-xạ ảnh với mọi môđun M thì U được gọi là xạ ảnh.

Môđun U được gọi là M-giả xạ ảnh nếu mọi toàn cấu $g : M \to N$ và mọi toàn cấu $v : U \to N$ có thể nâng lên đến một đồng cấu $\bar{v} : U \to M$. Môđun M được gọi là giả xạ ảnh nếu M là M-giả xạ ảnh

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\bar{v}"'] \arrow[d, "v"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Từ định nghĩa chúng ta thấy mọi môđun tựa xạ ảnh là giả xạ ảnh.

Tiếp theo, chúng ta xét các trường hợp tổng quát của môđun tựa nội xạ.

• Một môđun M được gọi là $C1$ (hoặc môđun CS hoặc môđun mở rộng) nếu với mọi môđun con A của M, tồn tại một hạng tử trực tiếp B của M thỏa mãn $A \leq^e B$.

• Một môđun M được gọi là $C2$ nếu môđun con A của M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M thì A cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

• Một môđun M được gọi là $C3$ nếu A và B là hai hạng tử trực tiếp của M thỏa mãn $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Trong bài báo này, trước hết chúng tôi tổng quan lại một số kết quả quan trọng liên quan đến lớp các môđun bất biến đẳng cấu. Các kết quả này thực sự là một mở rộng đẹp của lớp các môđun tựa nội xạ. Sử dụng các kết quả đã tổng quan, chúng tôi chứng minh được các kết quả sau:

(1) Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải và $R/Soc(R_R)$ thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải, thì $J(R)$ là lũy linh.

(2) Một vành R là vành tựa Frobenius nếu và chỉ nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải, ef-mở rộng phải và thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải.

2 LỚP MÔĐUN BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU

Từ kết quả M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M bất biến qua tất cả các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Năm 2013, các tác giả Zhou và Lee đã đưa ra khái niệm môđun bất biến đẳng cấu:

Định nghĩa 2.1 ([11])**.** Một môđun M được gọi là bất biến đẳng cấu nếu M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó

Sau đây, chúng tôi sẽ nêu một số tính chất cơ bản về môđun bất biến đẳng cấu:

Khi xét đẳng cấu giữa hai môđun con cốt yếu của một môđun bất biến đẳng cấu, chúng ta có kết quả sau:

Định lý 2.2 ([11, Theorem 2])**.** *Các điều kiện sau là tương đương với một môđun M:*

1. *M là môđun bất biến đẳng cấu.*
2. *Với mọi đẳng cấu giữa hai môđun con cốt yếu của M có thể mở rộng thành một tự đẳng cấu của M.*

Định lý 2.3 ([11])**.** *Cho một môđun M. Khi đó, các điều kiện sau là đúng:*

1. *Mỗi hạng tử trực tiếp của một môđun bất biến đẳng cấu là bất biến đẳng cấu.*
2. *Nếu tổng trực tiếp $M_1 \oplus M_2$ là bất biến đẳng cấu thì M_1 và M_2 là nội xạ tương hỗ.*
3. *Một môđun M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu $M \oplus M$ là bất biến đẳng cấu.*

Năm 2013, các tác giả Lee và Zhou đã đưa ra các câu hỏi: Liệu các môđun bất biến đẳng cấu có phải là giả nội xạ hay không; các môđun bất biến đẳng cấu có thỏa mãn điều kiện $C2$ hay không. Trong nghiên cứu của nhóm tác giả [4], họ đã trả lời các câu hỏi trên:

Định lý 2.4 ([4, Theorem 16])**.** *Cho một môđun M. Khi đó*

1. *Một môđun là giả nội xạ nếu và chỉ nếu nó là môđun bất biến đẳng cấu*
2. *Mỗi môđun bất biến đẳng cấu thoả mãn (C2)*

Rõ ràng mọi môđun tựa nội xạ là bất biến đẳng cấu. Tuy nhiên, chiều ngược lại không đúng, chúng ta có thể xem ví dụ sau:

Ví dụ 1. (1) Gọi $R = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ với $\mathbb{F}_2$ là trường có hai phần tử .

Đặt $M = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $M = e_{11}R$, với e_{11} là phần tử luỹ đẳng nguyên thuỷ, nên M là môđun không phân tích được. Chú ý M có hai môđun con đơn $S_1 = e_{12}R = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $S_2 = e_{13}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dễ dàng kiểm tra được chỉ có duy nhất một tự đẳng cấu đồng nhất của bao nội xạ của M. Từ đây, suy ra M là môđun bất biến đẳng cấu. Tuy nhiên, M không là tựa nội xạ vì nó không phải là môđun đều.

(2) Gọi $A = \mathbb{F}_2[x]$ và

$$R = \begin{bmatrix} A/(x) & 0 \\ A/(x) & A/(x^2) \end{bmatrix}$$

Đặt $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A/(x) & A/(x^2) \end{bmatrix}$. Vì $M = e_{22}R$, với e_{22} là phần tử luỹ đẳng nguyên thuỷ, nên M không phân tích được như $R-$ môđun phải. Chú ý M có hai môđun con đơn $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A/(x) & 0 \end{bmatrix}$ và $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (x)/(x^2) \end{bmatrix}$ sao cho $S_1 \oplus S_2$ là cốt yếu trong M. Rõ ràng R là $\mathbb{F}_2$-đại số hữu hạn chiều. Khi đó, M là môđun bất biến đẳng cấu. Tuy nhiên M không tựa nội xạ vì nó không phải là môđun đều.

Một số điều kiện để môđun bất biến đẳng cấu là tựa nội xạ.

Mệnh đề 2.5 ([11])**.** *Cho một vành R. Khi đó:*

1. *Nếu 2 là phần tử khả nghịch của vành R, thì mỗi $R-$ môđun bất biến đẳng cấu là tựa nội xạ.*
2. *Nếu M là môđun CS và bất biến đẳng cấu thì M là tựa nội xạ.*

Định lý 2.6 ([7])**.** *Các khẳng định sau đây là đúng:*

1. *Nếu M là một môđun phải R sao cho $End(M)$ không có ảnh đồng cấu đẳng cấu với trường $\mathbb{F}_2$ thì M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M là bất biến đẳng cấu.*
2. *Nếu A là một đại số trên trường $\mathbb{F}$ nhiều hơn hai phần tử thì mọi $A-$môđun phải M là bất biến đẳng cấu nếu và chỉ nếu M là tựa nội xạ.*

Định nghĩa 2.7 ([8])**.** Cho M là một R-môđun phải:

1. Môđun M được gọi là có tính chất giản ước nếu $M \oplus A \simeq M \oplus B$ thì $A \simeq B$. Môđun M được gọi là có tính chất giản ước trong nếu $M = A_1 \oplus B_1 \simeq A_2 \oplus B_2$ với $A_1 \simeq A_2$ thì $B_1 \simeq B_2$.

2. Môđun A được gọi là có tính chất thay thế nếu với mọi môđun $M = A_1 \oplus H = A_2 \oplus K$ với $A_1 \simeq A \simeq A_2$ thì tồn tại một môđun con C của M sao cho $M = C \oplus H = C \oplus K$.

3. Môđun M được gọi là trực tiếp hữu hạn nếu M không đẳng cấu với một hạng tử thực sự của chính nó. Một vành R được gọi là trực tiếp hữu hạn nếu $xy = 1$ suy ra $yx = 1$ với mọi $x, y \in R$.

Từ định nghĩa chúng ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 2.8. 1. Một môđun M là trực tiếp hữu hạn nếu và chỉ nếu vành tự đồng cấu $\mathrm{End}(M)$ là trực tiếp hữu hạn.

2. Môđun có tính chất thay thế $\Rightarrow$ có tính giản ước $\Rightarrow$ có tính giản ước trong $\Rightarrow$ trực tiếp hữu hạn.

Trường hợp M là môđun bất biến đẳng cấu thì ta có:

Định lý 2.9 ([8])**.** *Các điều kiện sau là tương đương với một môđun bất biến đẳng cấu M:*

1. *M có tính chất thay thế.*
2. *M có tính giản ước.*
3. *M có tính giản ước trong.*
4. *M là trực tiếp hữu hạn.*

Định lý 2.10 ([8])**.** *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu. Khi đó, nếu M là trực tiếp hữu hạn thì $E(M)$ cũng trực tiếp hữu hạn.*

Tiếp theo chúng ta sẽ xét cấu trúc của môđun bất biến đẳng cấu. Trước hết như chúng ta được biết nếu M là môđun tựa nội xạ, khi đó $J(\mathrm{End}(M))$ gồm tất cả các tự đồng cấu của M có nhân cốt yếu và $\mathrm{End}(M)/J(\mathrm{End}(M))$ là vành chính quy von Neumann. Và $\mathrm{End}(M)/J(\mathrm{End}(M))$ còn là môđun phải tựa nội xạ ([5], [12]).

Mở rộng kết quả trên với môđun bất biến đẳng cấu

Định lý 2.11 ([8])**.** *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu. Khi đó, $J(End(M))$ gồm tất cả các tự đồng cấu của M có nhân cốt yếu. $End(M)/J(End(M))$ là vành chính quy von Neumann và các luỹ đẳng nâng modulo $J(End(M))$.*

(Chú ý là: $\mathrm{End}(M)/J(\mathrm{End}(M))$ không nhất thiết là môđun phải tựa nội xạ như với trường hợp M là môđun tựa nội xạ)

Định nghĩa 2.12 ([4])**.** Môđun M được gọi là không chính phương nếu M không có mô đun con $N \neq 0$ đẳng cấu với $X \oplus X$ với X là môđun nào đó.

Định lý 2.13 ([4])**.** *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu. Khi đó, M có sự phân tích $M = A \oplus B$, trong đó A là môđun tựa nội xạ và B là môđun không chính phương.*

Định nghĩa 2.14 ([6])**.** Một $R-$môđun phải M được gọi là thoả mãn tính chất chuyển nếu với mọi $R-$môđun phải A và bất kì hai sự phân tích tổng trực tiếp $A = M' \oplus N = \bigoplus_{i \in I} A_i$ với $M' \simeq M$, tồn tại các môđun con B_i của A_i sao cho $A = M' \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i)$.
Nếu $|I| < \infty$ thì M được gọi là thoả tính chất chuyển hữu hạn. Một vành R được gọi thỏa mãn tính chất chuyển nếu môđun R_R (hay ${}_RR$) thoả tính chất chuyển.

Trong [6], tác giả đã chứng minh được mọi môđun tựa nội xạ thoả mãn tính chất chuyển. Mở rộng kết quả này, các tác giả trong [8] đã chỉ kết quả trên vẫn còn đúng cho môđun bất biến đẳng cấu.

Định lý 2.15 ([8])**.** *Mỗi môđun bất biến đẳng cấu thoả mãn tính chất chuyển.*

Định nghĩa 2.16 ([8])**.** Vành R được gọi là vành *clean* nếu mỗi phần tử $a \in R$ có thể biểu diễn $a = e + u$ với e là một luỹ đẳng trong R và u là phần tử khả nghịch trong R. Môđun M được gọi là môđun *clean* nếu vành $\mathrm{End}(M)$ là vành clean.

Định lý 2.17 ([8])**.** *Mọi môđun bất biến đẳng cấu là clean.*

Trong mục này của bài báo, chúng tôi đưa ra một số kết quả khác về vành bất biến đẳng cấu. Một vành R được gọi là bất biến đẳng cấu phải nếu R_R là một môđun bất biến đẳng cấu.

Mệnh đề 2.18. *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải và $R/Soc(R_R)$ thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải, thì $J(R)$ là lũy linh.*

Chứng minh. Giả sử $R/Soc(R_R)$ thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải. Đặt $S = Soc(R_R)$ và ký hiệu $\bar{R} = R/S$ và $\bar{a} = a + S$ với mọi $a \in R$. Cho mỗi $a_1, a_2, ...$ trong $J(R)$, vì

$$r_{\bar{R}}(\bar{a}_1) \leq r_{\bar{R}}(\bar{a}_2\bar{a}_1) \leq \cdots$$

nên theo giả thiết tồn tại một số nguyên dương m sao cho $r_{\bar{R}}(\bar{a}_m \ldots \bar{a}_2\bar{a}_1) = r_{\bar{R}}(\bar{a}_{m+k} \ldots \bar{a}_2\bar{a}_1)$ cho mỗi $k = 0, 1, 2, ...$ Bây giờ cho mỗi số nguyên dương n, vì $a_{n+1}a_n...a_1 \in J(R) \leq Z(R_R)$, $r(a_{n+1}a_n...a_1)$ là cốt yếu trong R_R. Vì vậy $S \leq r(a_{n+1}a_n...a_1)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng

$$r_{\bar{R}}(\bar{a}_n...\bar{a}_2\bar{a}_1) \leq r(a_{n+1}a_n...a_1)/S \leq r_{\bar{R}}(\bar{a}_{n+1}...\bar{a}_2\bar{a}_1).$$

Thật vậy, giả sử $b + S \in r_{\bar{R}}(\bar{a}_n...\bar{a}_2\bar{a}_1)$. Khi đó chúng ta có $a_n...a_1b \in S$. Nhưng vì $S \leq r(a_{n+1})$, nên chúng ta có $a_{n+1}a_n...a_1b = 0$. Vậy $b \in r(a_{n+1}a_n...a_1)$ và vì vậy $b + S \in r(a_{n+1}a_n...a_1)/S$. Bao hàm thức $r(a_{n+1}a_n...a_1)/S \leq r_{\bar{R}}(\bar{a}_{n+1}...\bar{a}_2\bar{a}_1)$ là rõ ràng. Điều này suy ra

$$r(a_{m+1}a_m...a_1)/S = r(a_{m+2}a_{m+1}...a_1)/S$$

bởi vì $r_{\bar{R}}(\bar{a}_m...\bar{a}_2\bar{a}_1) = r_{\bar{R}}(\bar{a}_{m+2}...\bar{a}_2\bar{a}_1)$. Khi đó

$$r(a_{m+1}a_m...a_1) = r(a_{m+2}a_{m+1}a_m...a_1),$$

và vì vậy $(a_{m+1}a_m...a_1)R \cap r(a_{m+2}) = 0$. Mặt khác, $r(a_{m+2})$ là iđêan phải cốt yếu của R, và vì vậy $a_{m+1}a_m...a_1 = 0$. Vì vậy $J(R)$ là T-lũy linh phải và iđêan $(J(R)+S)/S$ của vành $\bar{R} = R/S$ là T-lũy linh phải. Theo [2, Proposition 29.1], $(J(R) + S)/S$ là lũy linh, và khi đó tồn tại một số nguyên dương t sao cho $J(R)^t \leq S$. Suy ra $J(R)^{t+1} \leq SJ$. Vậy $J(R)$ là lũy linh. □

Một vành R được gọi là ef-mở rộng phải nếu mỗi iđêan phải đóng của R mà chứa một iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu là một hạng tử trực tiếp. Rõ ràng chúng ta thấy, nếu R là ef-mở rộng phải thì mỗi iđêan phải hữu hạn sinh của R là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của R_R. Như chúng ta được biết, một vành là tựa Frobenius nếu và chỉ nếu nó là tự nội xạ phải và thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải. Từ đây, chúng ta có một đặc trưng của vành tựa Frobenius thông qua vành bất biến đẳng cấu phải, ef-mở rộng phải với điều kiện dây chuyền như sau:

Định lý 2.19. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R*

1. *R là vành tựa Frobenius.*

2. *R là vành bất biến đẳng cấu phải, ef-mở rộng phải và thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải.*

Chứng minh. (1) ⇒ (2) là rõ ràng.

(2) ⇒ (1) Vì R là vành bất biến đẳng cấu phải và thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải nên R là vành nửa nguyên sơ theo [13]. Giả sử $Soc(R_R) = \oplus_{i\in I}S_i$ với mỗi S_i là đơn. Cho mỗi i thuộc I. Vì R là vành ef-mở rộng phải nên tồn tại các phần tử lũy đẳng f_i của R sao cho S_i cốt yếu trong f_iR. Ngoài ra họ $\{S_i\}$ là họ độc lập nên suy ra $\{f_iR\}$ là họ độc lập và $Soc(R_R) \leq \oplus_{i\in I}f_iR$ và vì vậy $\oplus_{i\in I}f_iR$ cốt yếu trong R_R (*). Vì R là vành bất biến đẳng cấu phải nên R_R thỏa điều kiện $C2$ và do đó nó thỏa mãn điều kiện $C3$. Từ đây suy ra $\oplus_{i\in I}f_iR$ là một hạng tử trực tiếp địa phương của R_R. Mặt khác, R_R thỏa điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải nên suy ra $\oplus_{i\in I}f_iR$ là môđun con đóng của R_R theo [3, Lemma 8.1(1)]. Khi đó theo (*) ta phải có $R_R = \oplus_{i\in I}f_iR$ vì vậy $R_R = \oplus_{i=1}^{n}f_iR$ cho số nguyên dương n nào đó và đồng thời mỗi f_iR là đều (vì có môđun con đơn cốt yếu trong nó). Suy ra R là vành tự nội xạ phải. Vậy R là vành tựa Frobenius. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. N.Abyzov,T.C.Quynh, and D.D.Tai, Dual automorphism invariant modules over perfect rings ,Siberian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 5, pp. 743–751, 2017.

[2] F. W. Anderon and K. R. Fuller, Rings and categories of modules, Springer - Verlag, New York, 1974.

[3] N.V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, R. Wisbauer, Extending Modules, Pitman 1996.

[4] N. Er, S. Singh, A.K. Srivastava, Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra 379 (2013) 223–229.

[5] C. Faith, Y. Utumi, Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. Math. 15 (1964) 166–174.

[6] L. Fuchs, On quasi-injective modules, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 23 (1969) 541–546.

[7] P.A. Guil Asensio, A.K. Srivastava, Additive Unit Representations in Endomorphism Rings and an Extension of a Result of Dickson and Fuller, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., in press.

[8] Guil Asensio P. A. and Srivastava A. K., Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property, J. Algebra, vol. 388, 101–106 (2013).

[9] S. K. Jain, S. Singh, On pseudo-injective modules and self-pseudo-injective rings, J. Math. Sci.,1967

[10] R.E. Johnson, E.T. Wong, Quasi-injective modules and irreducible rings, J. Lond. Math. Soc. 36 (1961) 260–268.

[11] T.K. Lee, Y. Zhou, Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra Appl. 12 (2) (2013).

[12] B.L. Osofsky, Endomorphism rings of quasi-injective modules, Canad. J. Math. 20, 1968) 895–903.

[13] T. C. Quynh, M. T. Kosan and L. V. Thuyet, On automorphism-invariant rings with chain condition, Vietnam Journal of Mathematics (in press 2018).

[14] S. Singh, A.K. Srivastava, Dual automorphism-invariant modules, J. Algebra 371 (2012) 262–275.

Title: SOME RESULTS ABOUT AUTOMORPHISM INVARIANT MODULES

Abstract: In this paper, we review some results about automorphism invariant modules. In addition, we have given some results regarding the quasi-Frobenius ring and we prove that a ring R is a quasi-Frobenius ring if and only if R is a right automorphism-invariant ring, right ef-extending with maximum condition on right annihilators.

Keyword: Injective module, pseudo injective module, automorphism invariant module.