CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP *SU*(1,1) THÊM MỘT VÀ BỚT MỘT PHOTON LẺ

PHAN THỊ TÂM[1]
TRƯƠNG MINH ĐỨC[1,*], *LÊ THỊ HỒNG THANH*[2]
[1]*Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*
[2]*Trường Đại học Quảng Nam*
[*]*Email: tmduc2009@gmail.com*

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, nén Hillery bậc cao, tính phản kết chùm bậc cao, tính chất đan rối và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ. Chúng tôi thu được kết quả là trạng thái này thể hiện tính nén tổng hai mode nhưng không thể hiện tính nén hiệu hai mode. Hơn nữa, trạng thái này thể hiện hoàn toàn tính nén Hillery bậc cao với $k = 2$, thể hiện tính phản kết chùm bậc cao tùy theo các giá trị l, p. Ngoài ra, trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và chỉ thể hiện tính đan rối khi bậc n lẻ.
Từ khóa: Trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$, Tính chất phi cổ điển, Tính đan rối.

1. GIỚI THIỆU

Ngày nay, trong lĩnh vực xử lí thông tin và truyền thông, các trạng thái phi cổ điển đang được tập trung nghiên cứu vì chúng có rất nhiều lợi ích như tăng tốc độ truyền tin, tính bảo mật cao và chống nhiễu. Bên cạnh đó, các trạng thái này là cơ sở nghiên cứu và áp dụng vào các lĩnh vực như: lý thuyết chất rắn, quang lượng tử, thông tin lượng tử và máy tính lượng tử. Thế nhưng phải làm thế nào để tín hiệu truyền tin có tính lọc lựa cao và giảm thiểu được tối đa tính nhiễu. Trong thực nghiệm trạng thái hai mode $SU(1,1)$ đã được tạo ra bởi công nghệ trạng thái lượng tử. Các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode $SU(1,1)$ đã được khảo sát trong nghiên cứu của Lê Đình Nhân [1]. Trạng thái hai mode $SU(1,1)$ đã được Perelomov [2] định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle_{ab} &= \exp\left(\alpha\hat{K}_+ - \alpha^*\hat{K}_-\right)|q,0\rangle_{ab}\\ &= (1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right]^{\frac{1}{2}}\xi^n|n+q,n\rangle_{ab},\end{aligned} \tag{1}$$

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 03(51)/2019: tr. 82-91
Ngày nhận bài: 21/03/2019; Hoàn thành phản biện: 25/05/2019; Ngày nhận đăng: 05/06/2019

trong đó $\xi = -\tanh(\theta/2)\exp(-i\varphi)$ với r, φ thực. Với việc thêm và bớt photon vào trạng thái $|\varphi\rangle_{ab}$ ta được một trạng thái phi cổ điển mới. Vì vậy, chúng tôi đề xuất trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ có dạng

$$|\psi\rangle_{ab} = \mathcal{N}(\hat{a}^\dagger + \hat{b})(|\varphi\rangle_{ab} - |-\varphi\rangle_{ab}), \tag{2}$$

trong đó $\hat{a}^\dagger(\hat{a}), \hat{b}^\dagger(\hat{b})$ là toán tử sinh (hủy) photon của mode a và mode b, $|\pm\varphi\rangle_{ab}$ là các trạng thái hai mode $SU(1,1)$ có dạng

$$|\pm\varphi\rangle_{ab} = (1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right]^{\frac{1}{2}} (\pm\xi)^n |n+q, n\rangle_{ab}. \tag{3}$$

Trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ được viết lại thông qua các trạng thái Fock dưới dạng

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ab} = \mathcal{N}(1-|\xi|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\tfrac{(n+q)!}{n!q!}\right]^{\frac{1}{2}} [(1-(-1)^n]\, \xi^n \\ \times \left\{\sqrt{n+q+1}|n+q+1, n\rangle_{ab} + \sqrt{n}|n+q, n-1\rangle_{ab}\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

trong đó $\mathcal{N}$ là hệ số chuẩn hóa được xác định bởi

$$\mathcal{N} = \left[(1-|\xi|^2)^{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] [(1-(-1)^n]^2 \xi^n (2n+q+1)\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{5}$$

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm một photon ở mode a và bớt một photon ở mode b vào trạng thái kết hợp hai mode $SU(1,1)$ lẻ.

2. TÍNH CHẤT NÉN TỔNG

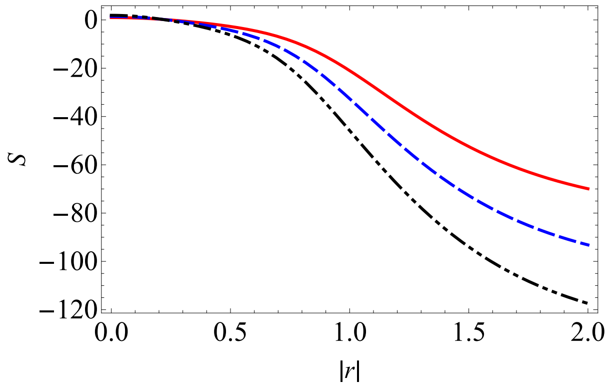
Chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn nén tổng do Hillery đưa ra [3]. Toán tử nén tổng được định nghĩa như sau

$$\hat{V}_\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + e^{-i\phi}\hat{a}\hat{b}\right), \tag{6}$$

trong đó ϕ là góc xác định hướng của $\langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^d ag\rangle$ trong mặt phẳng phức. Một trạng thái thể hiện tính nén tổng nếu

$$S = \left\langle \hat{V}_\phi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\phi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\langle \hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\rangle < 0, \tag{7}$$

trong đó $\hat{n}_a$ và $\hat{n}_b$ lần lượt là toán tử số hạt của mode a và b. Độ nén càng cao nếu S càng âm. Đối với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, chúng



Hình 1: *Sự phụ thuộc của S vào r và q cố định $\cos 2(\varphi+\phi) = -1$. Từ trên (đường liền) xuống dưới ứng với $q = 1, 2, 3$.*

tôi thu được tham số nén tổng dưới dạng

$$
\begin{aligned}
S =& \frac{\tanh^2 r \cos 2\gamma \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q+2)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r(2n+q+3)}{2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r(2n+q+1)} \\
&+ \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r\left\{n(n+q+1)^2 + n(n-1)(n+q)\right\}}{2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r(2n+q+1)} \\
&- \frac{1}{4}\left[\frac{2\tanh^2 r\cos(\theta+2\varphi)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q+2)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r(2n+q+1)}\right. \\
&\left.+ \frac{2\cos\phi\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q+1)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} rn}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n} r(2n+q+1)}\right]^2 .
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Kết quả khảo sát cho thấy trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ có nén tổng. Tính chất này càng biểu hiện rõ khi r càng lớn hoặc q càng cao (xem hình 1).

3. TÍNH CHẤT NÉN HIỆU

Toán tử nén hiệu [3] được định nghĩa như sau

$$\hat{\mathrm{W}}_\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi}\hat{a}\hat{b}^\dagger + e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger\hat{b}\right). \tag{9}$$

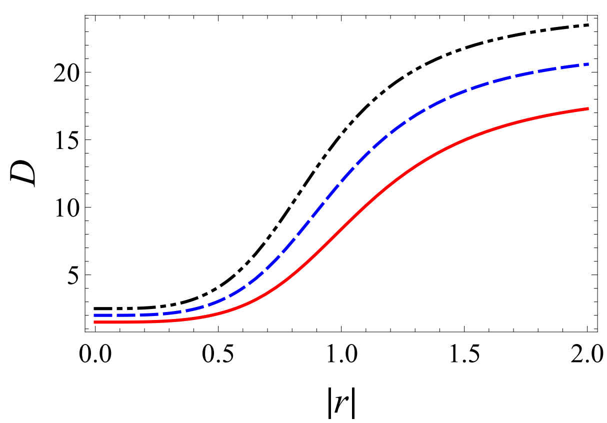
Một trạng thái thể hiện tính nén hiệu nếu

$$D = \left\langle \hat{\mathrm{W}}_\phi^2\right\rangle - \left\langle \hat{\mathrm{W}}_\phi\right\rangle^2 - \frac{1}{4}|\left\langle \hat{n}_a - \hat{n}_b\right\rangle| < 0. \tag{10}$$

Đối với thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, chúng tôi thu được tham số nén hiệu dưới dạng

$$D = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+1)!}{(n-1)!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r(2n+q+1)}{4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r(2n+q+1)} + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r \left\{(n+1)(n+q+1)^2 + n^2(n+q)\right\}}{4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r(2n+q+1)} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r \left\{(n+q+1)^2 - n(1+n-nq)\right\}}{4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] tanh^{2n} r(2n+q+1)}. \tag{11}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy rằng D luôn dương với mọi giá trị r và q. Do vậy, trạng thái hai



Hình 2: *Sự phụ thuộc của D vào r và q cố định $\cos 2(\varphi + \phi) = -1$. Từ dưới (đường liền) lên trên ứng với $q = 1, 2, 3$.*

mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ không thể hiện tính chất nén hiệu (xem hình 2).

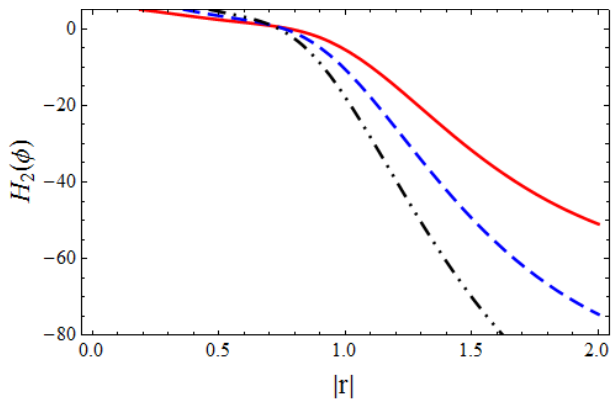
4. TÍNH CHẤT NÉN HILLERY BẬC CAO

Để tiện khảo sát chúng tôi đưa ra tham số nén $H_k(\phi)$ như sau

$$H_k(\phi) = VX_{ab,k}(\phi) - \frac{1}{8}\left|\hat{F}_{ab}(k)\right|.$$

Nén kiểu Hillary [3] phương sai biên độ trực giao chỉ xuất hiện khi

$$H_k(\phi) < 0. \tag{12}$$



Hình 3: *Sự phụ thuộc của $H_2(\phi)$ vào r và q cố định $\cos 2(\varphi+\phi) = -1$. Từ trên (đường liền) xuống dưới ứng với $q = 1, 2, 3$.*

Bây giờ, chúng tôi khảo sát trường hợp cụ thể $k = 2$. Chúng tôi thu được tham số nén như sau:

$$\begin{aligned}
H_2(\phi) =& \frac{3\tanh^2 r\cos 2\gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q+2)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+3)}{2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)} \\
&+ \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r}{8\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)} \times \Big[(n+q+1)(n+q+2) \\
&(2n+q+3) + 4(n+q+1)(n+q+2)(n+1) + 4n^2(n+q+1) \\
&+ (n+1)(n+2)(n+q+1) + n^2(n+1) + (n+q+1)\Big] \\
&- \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r}{8\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)} \times \Big[n(n+q)(n+q-1) \\
&+ 4n(n+q+1)^2 + 4n(n-1)(n+q) + (n-1)n(n+q+1) + (n-1)(n-2)n\Big] \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{2\tanh^2 r\cos(\phi+2\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q+2)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)}\right. \\
&\left.+ \frac{2\cos\phi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q+1)!}{(n-1)!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)}\right]^2 \\
&- \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\left\{(n+q+1)^2+n(3n+2q)\right\}}{8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}\left(1-(-1)^n\right)\tanh^{2n} r\,(2n+q+1)} - 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Kết quả khảo sát cho thấy trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ có nén Hillery ứng với trường hợp $k = 2$. Tính chất này càng biểu hiện rõ khi $r > 0,8$ hoặc q càng lớn thì mức độ nén Hillery cũng tăng lên (xem hình 3).

5. TÍNH CHẤT PHẢN KẾT CHÙM VÀ SỰ VI PHẠM BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

5.1. Tính chất phản kết chùm

Tiêu chuẩn cho sự tồn tại tính phản kết chùm của một trạng thái hai mode được viết dưới dạng sau [4]

$$R(l,p) = \frac{\left\langle \hat{n}_a^{(l+1)} \hat{n}_b^{(p-1)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(p-1)} \hat{n}_b^{(l+1)} \right\rangle}{\left\langle \hat{n}_a^{(l)} \hat{n}_b^{(p)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(p)} \hat{n}_b^{(l)} \right\rangle} - 1 < 0. \tag{14}$$

Sau khi tính toán giá trị trung bình các toán tử trong trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, kết quả như sau

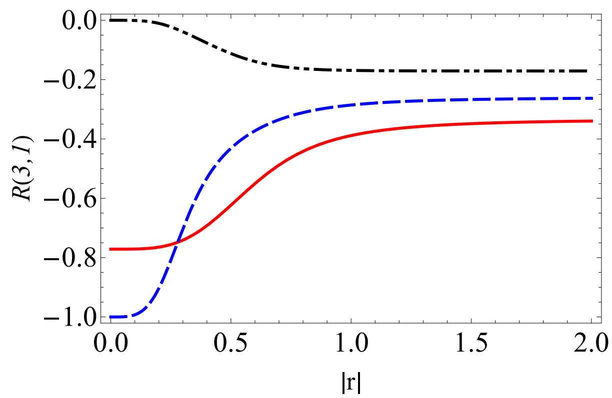
$$\begin{aligned}
R(l,p) = &\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \xi^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \xi^{2n} (2n+q+1)} \right. \\
&\times \left[\frac{(n+q)!n!}{(n+q-l+1)!(n-p)!} + \frac{(n+q+1)!n!(n+q+1)}{(n+q-l)!(n-p+1)!} \right. \\
&\left.\left. + \frac{(n+q)!n!}{(n+q-p+1)!(n-l-2)!} + \frac{(n+q+1)!n!(n+q+1)}{(n+q-p+2)!(n-l-1)!} \right] \right) \\
&\times \left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \xi^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \xi^{2n} (2n+q+1)} \right. \\
&\times \left[\frac{(n+q)!n!}{(n+q-l)!(n-p-1)!} + \frac{(n+q+1)!n!(n+q+1)}{(n+q-l)!(n-p)!} \right. \\
&\left.\left. + \frac{(n+q)!n!}{(n+q-p)!(n-l-1)!} + \frac{(n+q+1)!n!(n+q+1)}{(n+q-p+1)!(n-l)!} \right] \right)^{-1} - 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Khảo sát với giá trị cụ thể $l = 3$, $p = 1$ bằng đồ thị cho thấy trạng thái được khảo sát mang tính chất phản kết chùm. Tính phản kết chùm tăng hay giảm còn tùy thuộc vào giá trị của r và q (xem hình 4).

5.2. Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Để khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz [5] của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, chúng tôi tính toán biểu thức sau:

$$I = \frac{\left[\left\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger 2} \hat{b}^2 \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}}}{\left| \left\langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{a} \right\rangle \right|} - 1. \tag{16}$$

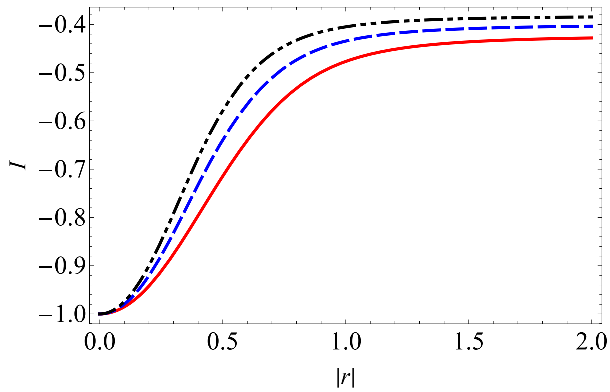


Hình 4: *Sự phụ thuộc của $R_{ab}(3,1)$ vào r và $q = 1, 2, 3$ cố định $\cos 2(\varphi + \phi) = -1$. Đường biểu diễn các tham số theo thứ tự tương ứng với đường màu đỏ, đường màu xanh, màu đen.*

Bằng cách tính trung bình trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, chúng tôi thu được kết quả sau:

$$
\begin{aligned}
I =& \Bigg[\frac{\left(1-|\xi|^2\right)^{1+q}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}[(1-(-1)^n]^2\tanh^{2n}r.}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n}r(2n+q+1)} \\
&\times\left\{(n+q+1)^2(n+q)+n(n+q)(n+q-1)\right\}\Bigg]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left[\frac{\left(1-|\xi|^2\right)^{1+q}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}[(1-(-1)^n]^2\tanh^{2n}r\times\{n(n-1)(n+q-1)\}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n}r(2n+q+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times\Bigg[\frac{\left(1-|\xi|^2\right)^{1+q}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+q)!}{n!q!}[(1-(-1)^n]^2\tanh^{2n}r^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right][1-(-1)^n]\tanh^{2n}r(2n+q+1)} \\
&\times\left\{(n+q+1)^2(n+1)+n(n+q)(n-1)\right\}\Bigg]^{-1}-1.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Sự phụ thuộc của I vào r và q, mỗi đường biểu diễn cho ta mức độ vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz theo biên độ kết hợp r và q nhận mỗi giá trị khác nhau, $q = 1$ tương ứng đường màu đỏ, $q = 2$ tương ứng đường màu xanh, $q = 3$ tương ứng đường màu đen. Đồ thị cho thấy $I < 0$ với mọi giá trị của q và r. Vậy, trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (xem hình 5).



Hình 5: *Sự phụ thuộc của I vào r và q. Từ dưới (đường liền) lên trên ứng với* $q = 1, 2, 3$.

6. TÍNH CHẤT ĐAN RỐI

Theo Hillery-Zubairy [6], nếu một trạng thái hai mode thỏa mãn điều kiện sau thì kết luận trạng thái đó bị đan rối.

$$\left|\left\langle \hat{a}^m \hat{b}^n \right\rangle\right|^2 > \left\langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger n} \hat{b}^n \right\rangle. \tag{18}$$

Từ (18) nếu $m \neq n$ thì trị trung bình ở vế trái trong biểu thức ứng với trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ bằng không, trong khi vế trái luôn không âm. Do vậy không có rối trong trường hợp này. Chúng tôi xét trường hợp $m = n$, ta đặt $n = 2k$, $(k > 0)$, bất đẳng thức (18) được viết lại như sau:

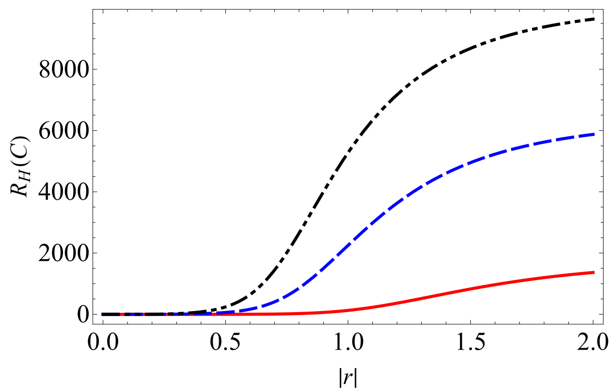
$$\left|\left\langle \hat{a}^{2k} \hat{b}^{2k} \right\rangle\right|^2 > \left\langle \hat{a}^{\dagger 2k} \hat{a}^{2k} \right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger 2k} \hat{b}^{2k} \right\rangle. \tag{19}$$

Đặt

$$R_H = \left\langle \hat{a}^{\dagger 2k} \hat{a}^{2k} \right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger 2k} \hat{b}^{2k} \right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}^{2k} \hat{b}^{2k} \right\rangle\right|^2. \tag{20}$$

Trạng thái đan rối nếu $R_H < 0$. Cụ thể với $(k = 1)$, ta tính toán cho trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
R_H = \Bigg[& \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r (2n+q+1)} \\
& \left\{ (n+q+1)^2 (n+q) + n(n+q)(n+q-1) \right\} \Bigg] \\
& \times \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r \times \left\{ n(n-1)(2n+q-1) \right\}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r (2n+q+1)} \\
& - \left\{ \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+2)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r \left|\xi^2\right| (2n+q+3)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r (2n+q+1)} \right\}^2.
\end{aligned} \tag{21}$$



Hình 6: *Sự phụ thuộc của R_H vào r và q. Từ dưới (đường liền) lên trên ứng với $q = 1, 3, 5$.*

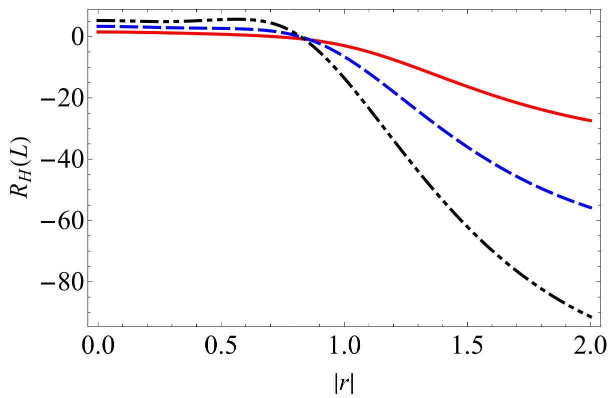
Hình 6 biểu diễn sự phụ thuộc của R_H vào r với các giá trị q khác nhau và $R_H > 0$ với mọi r. Vậy, trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ không thỏa mãn điều kiện đan rối Hillery-Zubairy.
Với $m = n$ lẻ, ta đặt $m = n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Cụ thể $k = 0$ ta có kết quả tính toán cho trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ có dạng như sau:

$$R_H = \left\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \right\rangle \left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle - \left| \left\langle \hat{a} \hat{b} \right\rangle \right|^2. \tag{22}$$

Tính trị trung bình của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ, chúng tôi có kết quả

$$\begin{aligned} R_H =& \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r \left\{ (n+q+1)^2 + n(n+q) \right\}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r (2n+q+1)} \\ & \times \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r \left\{ n(2n+q) \right\}.}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \xi^{2n} (2n+q+1)} \\ & - \left\{ \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q+1)!}{n!q!} \left[(1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r \left\{ \left|\xi^2\right| (n+q+2) + n \right\}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n!q!}\right] \left[1-(-1)^n\right] \tanh^{2n} r (2n+q+1)} \right\}^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Hình 7 cho thấy sự phụ thuộc của R_H vào r với các giá trị q khác nhau và $R_H > 0$ với mọi $r > 0,8$. Mặc khác, đường cong đi xuống thể hiện độ đan rối càng tăng. Điều này có ý nghĩa rằng sự chênh lệch số photon giữa hai mode càng lớn thì tính đan rối hai mode của trạng thái càng thể hiện rõ hơn. Trạng thái hai mode kết hợp $SU(1,1)$ thêm một và bớt một photon lẻ thể hiện tính đan rối.



Hình 7: *Sự phụ thuộc của R_H vào r và q. Từ trên(đường liền) xuống dưới ứng với $q = 1, 3, 5$.*

7. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng các điều kiện nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode và nén Hillery bậc cao, đưa ra các tham số nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode và nén Hillery bậc cao. Qua khảo sát, chúng tôi thu được trạng thái hai mode kết hợp $SU(1{,}1)$ thêm một và bớt một photon lẻ thể hiện tính chất nén tổng nhưng không nén hiệu. Đối với trường hợp nén tổng hai mode, mức độ nén tổng càng tăng khi biên độ kết hợp r và sự chênh lệch photon q càng tăng. Ngoài ra, trạng thái này hoàn toàn thể hiện tính nén Hillery bậc cao với $k = 2$. Tiếp theo, chúng tôi áp dụng tiêu chuẩn phản kết chùm cho trường hợp hai mode để tiến hành khảo sát tính chất phản kết chùm bậc cao của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1{,}1)$ thêm một và bớt một photon lẻ. Kết quả khảo sát cho thấy rằng trạng thái này thể hiện tính phản kết chùm mạnh, yếu tùy thuộc vào biên độ kết hợp r. Thêm vào đó, chúng tôi sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để khảo sát trạng thái hai mode kết hợp $SU(1{,}1)$ thêm một và bớt một photon lẻ và kết quả thu được là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz hoàn toàn bị vi phạm. Cuối cùng chúng tôi khảo sát tính chất đan rối của trạng thái hai mode kết hợp $SU(1{,}1)$ thêm một và bớt một photon lẻ bằng tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy. Kết quả khảo sát thì đối với tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy trạng thái chỉ đan rối khi bậc n lẻ và giá trị biên độ kết hợp r lớn hơn một giá trị xác định.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 103.01-2018.361.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Đình Nhân (2013), *Khảo sát tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode SU(1,1)*, Luận văn Thạc sĩ Vật lí, Đại học Sư phạm Huế.

[2] Perelomov. A.M. (1972), "Coherent states for arbitrary Lie groups", *Commun. Math. Phys*, 26, pp. 222 - 236.

[3] Hillery. M (1989), “Sum and diffrence squeezing of the electromagnetic field”, *Phys. Rev A*, 45, pp. 3147 - 3155.

[4] Lee C. T. (1990), "Many- photon anti-bunching in generlized pair coherent states", *Physical Review A*, 41, pp. 1569 - 1575.

[5] Glauber. R. J (1963), "Coherent anh Incoherent States of Radiation Field", *Phys. Rev*, 96(2), 131, pp. 2766 - 2768.

[6] Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), "Entanglement conditions for two - mode states: Applications", *Phys. Rev. A*, 74(3), pp. 032333-1 - 032333-7.

Title: THE NONCLASSICAL PROPERTIES OF THE ONE-PHOTON-ADDED AND ONE-PHOTON-SUBTRACTED TWO-MODE ODD $SU(1,1)$ COHERENT STATE

Abstract: In the paper, we consider the nonclassical properties of the one-photon-added and one-photon-subtracted two-mode odd $SU(1,1)$ coherent state such as two-mode sum squeezing, two-mode difference squeezing, higher-order Hillery squeezing, higher-order antibunching, entanglement and the violation of the Cauchy-Schwarz inequality. The results show that this state exhibits two-mode sum squeezing but does not exhibit two-mode difference squeezing. The higher-order Hillery squeezing appears in $k = 2$ and the antibunching exists depending on the variables l, p. We also show that this state violates the Cauchy-Schwarz inequality and becomes entangled state when the order n is odd.
Keywords: Coherent states, Non-classical properties, Squeezing states.